

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI" etapa locală – 21 februarie 2016

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA A XII-A

1. a. Din  $x * (y * z) = (x * y) * z$  rezultă  $(a - 5)(z - x) = 0$ , deci  $a = 5$ .....(2 puncte)  
 b. Legea de compoziție se mai scrie sub forma  $x * y = 6(x + 1)(y + 1) - 1$ .....(2 puncte)  
 Prin inducție se arată că  $x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n = 6^{n-1}(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) - 1$   
 .....(2 puncte)  
 În final obținem  $1 * 2 * 3 * \dots * 2016 = 6^{2015} \cdot 2017! - 1$ .....(1 punct)
2. a. Din calcul direct rezultă egalitatea.....(2 puncte)  
 b. Folosind egalitatea de la punctul anterior vom demonstra axiomele grupului: înmulțirea matricelor este asociativă,  $I_2 = A(0) \in G$  este elemental neutru, orice element din mulțime este simetrizabil față de înmulțirea matricelor pătratice de ordin 2. Din  $A(x) \cdot A(x') = A(2xx' + x + x')$  rezultă  $x' = \frac{-x}{2x+1}$  iar  $x' \neq -\frac{1}{2}$  deoarece, în caz contrar, am obține o contradicție. Deci  $(G, \cdot)$  este grup.....(2 puncte)  
 c. Folosind tot relația de la punctul a. se arată că  $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$ ..... (1 punct)  
 Injectivitatea este evidentă, iar surjectivitatea rezultă din faptul că pentru orice element din  $G$  este de forma  $A(x) = f(2x + 1) \in \text{Im} f$ .....(1 punct)
3. a. Avem  $\int f_1(x)dx = x - 3\ln(x + 3) + C$  .....(1 punct)  
 și  $\int f_2(x)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln(x + 3) + C$  .....(1 punct).  
 b. Fie  $F_2$  o primitivă pentru  $f_2$ . Atunci avem  $F_2'(x) = f_2(x) = \frac{x^2}{x+3} \geq 0, \forall x \in (-3, +\infty)$  deci  $F_2$  este crescătoare.....(2 puncte)  
 c. Avem  $F_n'(x) = x^{n-1} \frac{x}{x+3} < 0, \forall x \in (-3, 0)$  deci  $x^{n-1} > 0, \forall x \in (-3, 0)$ , iar de aici deducem că  $n$  este număr impar.....(3 puncte)
4. a. Avem  $\int_1^{\sqrt{3}} f(x^2)dx = \frac{\pi}{12}$  .....(1 punct)  
 și  $\int_1^{\sqrt{3}} g(x^2)dx = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1$  .....(1 punct)  
 b. Deoarece  $\int_{\frac{1}{a}}^a f(x)dx + \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx = \ln(a + 1) - \ln \frac{1+a}{a} - \ln a + \ln \frac{1}{a} = -\ln a$   
 .....(3 puncte)  
 Avem  $-\ln a = -1$  de unde rezultă  $a = e$ .....(2 puncte).